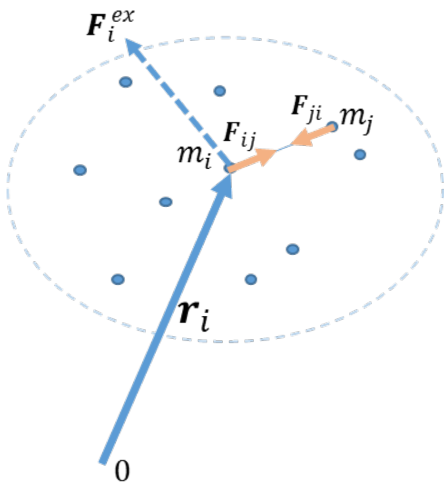
# 7　質点系の力学 II （一般的な取り扱い）

この章では、前章での２体問題をN体問題に拡張し、一般的な取り扱いをする。N体問題では重心が重要な役割を果たし、重心の運動と重心の周りの運動に分離することができる。前章で触れなかった質点系での回転の運動方程式についても述べる[1]。

## 7.1　質点系の運動方程式




右図のように、$n$ 個の質点（$1 \sim n$の番号をつける）からなる系を考える。それぞれの質量を $m_i$ 、位置ベクトルを$\mathbf{r}_i$ とする $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 。二つの質点 $i, j$ 間には相互に働く「内力」 $\mathbf{F}_{ij}, \mathbf{F}_{ji}$ が働いているとする（作用反作用の法則より、$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$）。ここで、$\mathbf{F}_{ij}$ の添え字 $ij$ は $j$ 番目の質点が $i$ 番目の質点に及ぼす力、という意味で使っている。ただし、$\mathbf{F}_{11}$ や $\mathbf{F}_{22}$ のように $i = j$ のような場合は除外する[2]。さらに、系の外からは「外力」$\mathbf{F}_i^{ex}$ $(i = 1 \ldots n)$ がそれぞれ質点に働いているとする。

この質点系の運動方程式をそのまま書き下すと、

$$\begin{cases} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_1^{ex} + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \ldots + \mathbf{F}_{1n} \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_2^{ex} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \ldots + \mathbf{F}_{2n} \\ \quad\vdots \\ m_n\ddot{\mathbf{r}}_n = \mathbf{F}_n^{ex} + \mathbf{F}_{n1} + \mathbf{F}_{n2} + \ldots + \mathbf{F}_{n,n-1} \end{cases} \qquad (7\text{-}1\text{-}1)$$

となる。

同じ式を和の記号$\sum$ を使って書くと、

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{ex} + \sum_{j \neq i}^{n} \mathbf{F}_{ij} \quad (i = 1,2,\ldots,n) \qquad (7\text{-}1\text{-}2)$$

となる。ここで、$\sum$は$i$ を固定したまま $j$ について$1 \sim n$ までの和をとる、という意味であるが、添え字の $j \neq i$ は $j = i$ のところだけは和から抜かす、という意味である。

式(7-1-1)は$n$ 個の連立微分方程式になっていて、すでに前章で述べたが、$n \geq 3$ では解析的に解くことはできない（多体問題）。**しかしながら、質点系全体の性質を調べることはできる。二体問題と同様に外力の総和がゼロの場合、全運動量（$n$ 個の質点の運動量の総和）は保存する。**以下では、まず、これを示す。

式(7-1-1)のすべての式を足し合わせると、

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 + \ldots + m_n\ddot{\mathbf{r}}_n &= \mathbf{F}_1^{ex} + \mathbf{F}_2^{ex} + \ldots + \mathbf{F}_n^{ex} + (\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21}) + (\mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{31}) + \ldots (\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}) + \ldots \\ &= \mathbf{F}_1^{ex} + \mathbf{F}_2^{ex} + \ldots + \mathbf{F}_n^{ex} \equiv \mathbf{F}_{tot}^{ex} \qquad (7\text{-}1\text{-}3) \end{aligned}$$

[1] 和の記号が頻繁に出てくるので、和の記号の取り扱いに慣れる練習にもなる。

[2] そのような力は「自分が自分に及ぼす力」、という意味になる。

となる。ただし、式(7-1-1)の右辺を足し合わせるとき、内力の順序を入れ替えて内力の和が作用反作用のペアの和になる事がわかるようにした。こうして、内力の和はゼロになるので、右辺の和には外力の総和 $\mathbf{F}_{tot}^{ex}$ のみが残る。

式(7-1-3)を和の記号で表すには、式(7-1-2)を $i$ について $1 \sim n$ までの和をとれば良いので、

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^{ex} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i}^{n} \mathbf{F}_{ij} \qquad (7\text{-}1\text{-}4)$$

となる[3]。上の作用反作用の法則を使った考察から、右辺第２項の内力の和は

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i}^{n} \mathbf{F}_{ij} = 0 \qquad (7\text{-}1\text{-}5)$$

となる[4]ので、結局、

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^{ex} = \mathbf{F}_{tot}^{ex} \qquad (7\text{-}1\text{-}6)$$

と書ける。

さて、質点すべての運動量の総和（全運動量）を

$$\mathbf{P}_{tot} \equiv \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \ldots + \mathbf{p}_n = m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 + \ldots + m_n \dot{\mathbf{r}}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \qquad (7\text{-}1\text{-}7)$$

とするならば、式(7-1-3)の左辺は、$\mathbf{P}_{tot}$ を時間で１階微分したもの $\dot{\mathbf{P}}_{tot} = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$ で書けるから、

$$\frac{d\mathbf{P}_{tot}}{dt} = \mathbf{F}_{tot}^{ex} \qquad (7\text{-}1\text{-}8)$$

が得られる[5]。こうして、質点系では「全運動量の時間変化」が内力には全く無関係に「外力の総和（全外力）」で決まることを示している。もし、**「外力の総和」がゼロであるならば質点系の全運動量は保存する**[6]。

$$\mathbf{F}_{tot}^{ex} = 0 \rightarrow \dot{\mathbf{P}}_{tot} = 0 \rightarrow \mathbf{P}_{tot} = \mathrm{const}. \qquad (7\text{-}1\text{-}9)$$

### 7-1-1 重心（質量中心）の運動

$n$ 個の質点からなる系では重心の位置ベクトル $\mathbf{r}_G$ は次のように定義される。

$$\mathbf{r}_G \equiv \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \ldots + m_n \mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \qquad (7\text{-}1\text{-}10)$$

これより、重心は「各質点の質量を重みにした位置ベクトルの加重平均」と言える。

---

[3] 式(7-1-4)の右辺の第２項のような形を「二重和」と言う。計算は、i=1に固定してjでの和をとり、その後、i=2、i=3… な場合についても、同様にして j の和を取っていく。これらすべての和が二重和の結果となる。

[4] 内力の総和を和の記号によって(7-1-5)式で与えられても、ゼロになるかどうかはすぐに判断できないかもしれない。このような場合は、和の記号を解消して(7-1-3)式のように、一旦、項別に書き戻してみると見通し良くなる事が多い。

[5] 二体問題での式(6-1-4)と全く同じである。

[6]外力が無い場合か、あるいは、個々の外力はゼロでなくとも総和がゼロの場合。

式(7-1-10)を和の記号で書くと、

$$\mathbf{r}_G = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M} \qquad (7\text{-}1\text{-}11)$$

ただし、全質量を $M \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i$ とした。和の記号は、簡単のため添え字を簡略化するか、全く書かないで、 $\sum_i m_i$ とか $\sum m_i$ のようにすることもあるので注意。

さて、質点系での重心の運動を見るために、まず、(7-1-10)、あるいは(7-1-11)の時間微分をとり重心の速度を求めると、

$$\dot{\mathbf{r}}_G = \frac{\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i}{M} \qquad (7\text{-}1\text{-}12)$$

右辺の分子は $\mathbf{P}_{tot}$ （式7-1-7参照）なので、重心の運動量を $\mathbf{P}_G \equiv M\dot{\mathbf{r}}_G$ で定義すると、式(7-1-12)の両辺に$M$をかけて,

$$\mathbf{P}_G = \mathbf{P}_{tot} \qquad (7\text{-}1\text{-}13)$$

となる。すなわち、（すべての質量が重心に集まったとした時の）重心の運動量と全運動量は等しい。

続いて、式(7-1-12)の時間微分を取って両辺に$M$をかけると、

$$M\ddot{\mathbf{r}}_G = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \qquad (7\text{-}1\text{-}14)$$

であるが、式(7-1-3)、あるいは、式(7-1-6)より $\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_{tot}^{ex}$ なので、

$$M\ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{F}_{tot}^{ex} \qquad (7\text{-}1\text{-}15)$$

が得られる。これは重心の運動を決める運動方程式である。すなわち、重心の運動は、**重心の位置に全ての質量$M$が集まったとし、外力の総和のみがあるとした場合の運動方程式で決まる**（内力に無関係）ことを意味している。もし、**外力の総和がゼロの場合、重心は静止しているか等速直線運動をする**[7]（(7-1-15)の右辺がゼロであれば、$\mathbf{v}_G \equiv \dot{\mathbf{r}}_G = \mathrm{const.}$ となる）。

式(7-1-15)は重心の運動量 $\mathbf{P}_G = M\dot{\mathbf{r}}_G$ を使って、

$$\frac{d\mathbf{P}_G}{dt} = \mathbf{F}_{tot}^{ex} \qquad (7\text{-}1\text{-}16)$$

とも書ける。$\mathbf{P}_G = \mathbf{P}_{tot}$なので、これは、 式(7-1-8)と同等の結果である。

[7] これは二体問題の結果、(6-1-9)式と同じである。

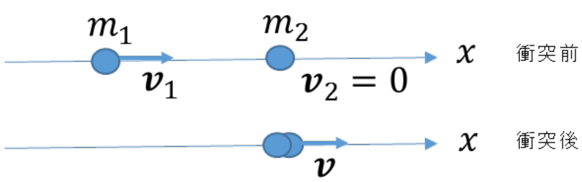
7-1-2 例題

ここで、いくつかの例題を検討する。

（**例題1**：粒子の分裂１）外力がゼロとする。直線上を一定の速度で動いていた物体が突然爆発分裂し、その破片は四方に飛び散っていった。爆発後、これらの重心はどんな運動をするか。
（**解答例**）重心は、そのまま等速直線運動を続ける。（爆発は系の内力による。よって外力ゼロのままなので、爆発前と同じ速度で等速直線運動を続ける。）

（**例題２**：粒子の分裂２）今、重力下で物体を斜めに投げ上げたとすると物体は放物線を描くが、途中で突然その物体が爆発分裂したとする。その破片は四方に飛び散っていった。それらの重心は爆発後、どんな運動をするか。
（**解答例**）重心は、そのまま放物線運動を続ける。（爆発は系の内力による。よって、重心では、分裂前と全く同じ質量$M$と外力$\mathbf{F}_{tot}^{ex}$ を考えれば良いので、分裂前と後では同じ運動方程式(7-1-15) が成り立つことになる。その結果、そのままの放物線運動を続ける。）

（**例題３:** 粒子の合体）外力はゼロとする。x軸上を左から質量$m_1$の質点が速度$\mathbf{v}_1$ でやってきて、x軸上で静止していた質量$m_2$の質点と衝突し合体した。その後、合体した物体はどんな運動をするか。




（**解答例A**: <u>運動量保存による方法</u>）外力の総和 $\mathbf{F}_{tot}^{ex}$ はゼロなので、式 (7-1-8) より全運動量　$\mathbf{P}_{tot} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$ は保存する（衝突前後で変化しない）。合体後の速度を$\mathbf{v}$ とすると、衝突前は $\mathbf{P}_{tot} = m_1\mathbf{v}_1 + 0$、衝突後は$\mathbf{P}'_{tot} = (m_1 + m_2)\mathbf{v}$ であるが、$\mathbf{P}_{tot} = \mathbf{P}'_{tot}$なので、$m_1\mathbf{v}_1 = (m_1 + m_2)\mathbf{v}$ となり、$\mathbf{v} = \dfrac{m_1}{(m_1 + m_2)}\mathbf{v}_1$ が得られる。$\mathbf{v}_1$はx軸上正の向きであるから、合体後はx軸上正の向きに$|\mathbf{v}| = \dfrac{m_1}{(m_1 + m_2)}|\mathbf{v}_1|$で等速直線運動をする。

（**解答例B**: <u>重心の速度一定から求める方法</u>）$\mathbf{F}_{tot}^{ex} = 0$ なので(7-1-15)式より、重心の速度 $\mathbf{v}_G = \dot{\mathbf{r}}_G =$ 一定。重心の座標（x軸上の運動なので一次元で扱う）は $x_G = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$ 、重心の速度は

$\dot{x}_G = \dfrac{m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{m_1v_1}{m_1 + m_2} =$ 一定。合体しているので衝突後の速度 $v$ は重心の速度でもある。よって、

$v = \dot{x}_G = \dfrac{m_1v_1}{m_1 + m_2}$となる。当然であるが、この結果は運動量保存の方法（解答例A）と一致する。

<**課題**> 重心に乗ってみた時（これを「**重心系**」と言う。これに対して、固定した座標での記述は「**実験室系**」と言う）例題３の物体の運動はどの様に見えるか考えてみよ。

**（例題4：**滑らかな床の上にある板の上を歩く人）滑らかな床に長さ $L$、質量 $M$の一様な板がある。質量$m$の人が板の右端から左端に移動した。板はどれだけ動くか。最初、板も人も静止していたとする[8]。


（**解答例A**: <u>運動量保存による方法</u>）外力はゼロなので板と人の全運動量 $\mathbf{P}_{tot}$ は保存する。人は板の上を直線的に歩くとし、一次元の運動とみなす。板の左端の座標を$X$、人の座標を$x$とする。最初は、$X=0$、$x=L$ で静止していたので $\dot{X}=0$、$\dot{x}=0$. また、板の重心座標 $X_G = X + \dfrac{L}{2}$.
板は広がりを持っているが、板の重心にすべての板の質量が集まっているとして取り扱えば良いので、最初の「板と人の運動量の和」（この系の全運動量）は

$$P_{tot} = m\dot{x} + M\dot{X}_G = m\dot{x} + M\frac{d}{dt}\left(X + \frac{L}{2}\right) = m\dot{x} + M\dot{X} = 0$$

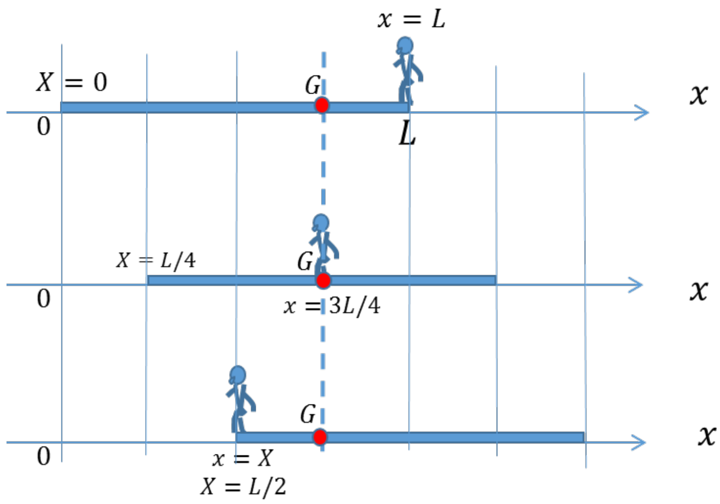
ここで、$\dot{X}=0$、$\dot{x}=0$ を使った。ただし、全運動量は保存しているから、初めだけでなく常に $P_{tot}=0$ となる。したがって、常に $m\dot{x} + M\dot{X} = 0$. これを時間で積分すると、

$$\int\left(m\frac{dx}{dt} + M\frac{dX}{dt}\right)dt = m\int dx + M\int dX = mx + MX + C = 0$$

この式で $C$ は積分定数である。よって、常に $mx + MX =$ 一定、となる。最初、$X=0$、$x=L$ であるから、これを入れると $mx + MX = mL + 0 = mL$. 人が板の左端に来た時、$x = X$ となるので、
$mX + MX = (m+M)X = mL$ より、 $X = \dfrac{m}{m+M}L$ が得られる。これから、板の動いた距離は
$X - 0 = \dfrac{m}{m+M}L.$

（**解答例B**: <u>重心の速度一定から求める方法</u>）人と板からなる系全体の重心は
$x_G = \dfrac{mx + MX_G}{m+M} = \dfrac{mx + M(X + L/2)}{m+M}$ である（すでに解答例Aで定義したが$X_G$は板のみの重心）。今、外力がゼロなので (7-1-15)式より重心は静止するか等速直線運動をする。最初、$\dot{x}=0$、$\dot{X}=0$ $(\dot{X}_G = 0)$ であるから、$\dot{x}_G = \dfrac{m\dot{x} + M\dot{X}_G}{m+M} = 0$ となり、<u>重心は常に静止のままで</u>移動しない。したがって、
$x_G = \dfrac{mx + M(X + L/2)}{m+M} =$ 一定であるから、$mx + MX =$ 一定 が得られる。後の手順は解答例Aの最後の４行と同じである。

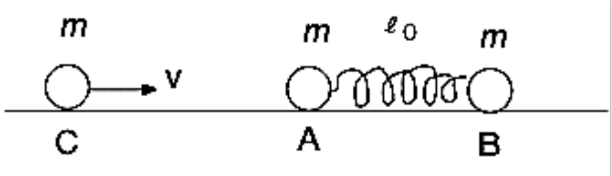
**＜例題５＞** 例題４で $M = m$ の時、どの様に板と人間が動くかを図に示しなさい。重心が動かないことに注意せよ。
（**解答例**）最終的な板の左端の座標は
$X = \dfrac{m}{m+m}L = \dfrac{L}{2}$.　$X = 0,\ \dfrac{L}{4},\ \dfrac{L}{2}$ の時の図を右に示す。




8 この問題では解答例Bの「重心の速度一定から求める方法」が楽でわかりやすい。

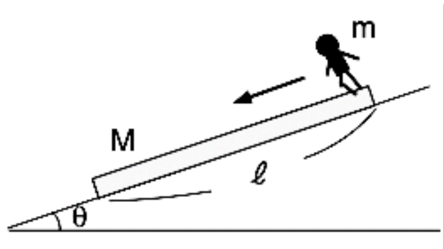
# 演習10

1. 右図のように、質量 $m$ の２つの質点A, Bが質量の無視できる自然長 $l_0$、ばね定数 $k$ のばねでつながれていて、滑らかな水平の床の上に置かれている。質量$m$のもうひとつの質点Cをばねと同じ直線上左方から速さ $v$で弾性的に衝突させた。
以下の設問に答えよ。




(1) 運動量保存則とエネルギー保存則を使い、衝突直後のCとAの速度が、それぞれ、0と$v$ であることを示せ。（衝突直後はBは無関係であることに注意。）
(2) 衝突後のAとBを二体問題として扱う。衝突直後のAとBからなる系の重心の速度を求めよ。
(3) 重心の座標 $x_G(t)$ を$l_0, v, t$ で表せ。（衝突した瞬間を$t=0$ 、最初のAの位置を原点とせよ。）
(4) A、Bからなる系の換算質量 $\mu$ を求めよ。
(5) （質点Aの上に乗ってBを見た）相対位置を$x=x_B-x_A$ とした時、相対位置に関する運動方程式を、$x, k, l_0, m$ で表せ。
(6) 上で得られた微分方程式の一般解を求めよ。（hint: 非同次方程式の一般解は、同次方程式の一般解＋非同次方程式の特殊解となる（(6-2-20)を見よ））。
(7) $x(0)=l_0,\ \dot{x}(0)=-v$ なる条件を考慮した時、解は$x(t)=-\dfrac{v}{\omega}\sin(\omega t)+l_0$ となることを示せ。ただし、$\omega=\sqrt{\dfrac{2k}{m}}.$
(8) 結局、A、Bからなる系は、Cとの衝突後、どのような運動をするか。

2. 右図のように、水平面と角度$\theta$ をなす滑らかな斜面上に、質量$M$、長さ$l$ の板があり、その上を質量$m$の人が走り下る。重心の運動方程式を使い、以下の設問に答えよ。ただし、重力加速度を$g$とする。




(1) 斜面に沿った座標軸を考え、重心の方程式をたてよ。
(2) 板が滑り落ちないようにするには、人はどんな加速度で走れば良いか。
(3) 前問の条件で、人が板の下端にたどり着くまでの時間を求めよ。

3. 質量$m_1$と質量$m_2$の二つの質点からなる系がある。これらの質点の運動方程式は、

$$\begin{cases} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1=\mathbf{F}_{12}+\mathbf{F}_1^{ex} \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2=\mathbf{F}_{21}+\mathbf{F}_2^{ex} \end{cases}$$

である。ただし、$\mathbf{F}_{12}, \mathbf{F}_{21}$ は内力、$\mathbf{F}_1^{ex}, \mathbf{F}_2^{ex}$ は外力である。それぞれの質点の運動量を$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$、それぞれの質点の原点のまわりの角運動量を$\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ , その総和を$\mathbf{L}_{tot}$ とする。また、外力による（原点のまわりの）それぞれの質点に対する力のモーメントを $\mathbf{N}_1^{ex}, \mathbf{N}_2^{ex}$、その総和を$\mathbf{N}_{tot}^{ex}$ とする。

(1) $\mathbf{L}_{tot}$ を $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ を使って表せ。
(2) $(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\times\mathbf{F}_{12}=0$ である。この理由を述べよ。
(3) (2)の結果を使い、$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_{tot}=\mathbf{N}_{tot}^{ex}$ となることを示せ。（内力に無関係。外力がゼロなら$\mathbf{L}_{tot}$ は保存する）